数理解析研究所講究録
362巻 1979年 124-135

Paris-Harringtonの結果について

豊田高專　　大浜茂生

PAを第1階のPeano arithmeticであるとする。Ramsey定理の有限形の一寸した変形(H)がNでは真になるが、PAでは証明できないという結果が

[1] Paris-Harrington : A Mathematical Incompleteness in Peano Arithmetic. - Handbook of Mathematical logic -

に示されている。一方Ramsey定理の有限形(R)はPAで証明可能であるということが知られている。こゝでは(H)と(R)のちがいに焦点をあて[1]を紹介する。§1で(R)の証明がPAで実行できることを示し，§2で[1]におけるPA⊬(H)の証明の概略をのべる。§3で、PAにおける独立性についてのより一般的結果が述べてある

[2] Paris : Some Independence Results for Peano Arithmetic JSL. vol. 43 1978.

についてふれる。

§1

定義

$[X]^n = \{ x \subseteq X \mid \overline{\overline{x}} = n \}$

$M \to (k)^e_r$: $\forall P: [M]^e \to r \; \exists H \subseteq M \; P([H]^e) =$ 一定, $\overline{\overline{H}} \geq k$.

このとき H は P に対して均質 (*homogeneous*) とよばれる。

$M \underset{*}{\to} (k)^e_r$: $\forall P: [M]^e \to r \; \exists H \subseteq M \; P([H]^e) =$ 一定, $\overline{\overline{H}} \geq \max(k, \min(H))$.

$\overline{\overline{H}} \geq \min(H)$ なる H は *relatively large* とよばれる。

(H) : $\forall e, k, r \; \exists M \; (M \underset{*}{\to} (k)^e_r)$.

(R) : $\forall e, k, r \; \exists M \; (M \to (k)^e_r)$.

ZF に無限公理のかわりにその否定をつけ加えてできる体系は自然数に関してはPAと同等であることが知られているので、以下の議論にはこれを使う。

定理

PA $\vdash$ (R).

証明

$r=2$ とき示せば十分である。なぜなら $r>2$ のときは帰納法で容易に示されるから。そこで $r=2$ として e に関する帰納法で証明する。次の式が成り立つことは明らかである：

$$M \to (k)^e_2 \;\Rightarrow\; \forall \overline{\overline{K}} \geq M \; (K \to (k)^e_2).$$

又 $\quad g(k) = \mu m \, (\forall K \, (\overline{\overline{K}} \geq m \Rightarrow (K \to (k)^e_2)))$

とおけば，この定義より

$$\forall M:\ \overline{\overline{M}} \geqq g(k),\ [M]^e = M_0 \cup M_1,\ M_0 \cap M_1 = \emptyset$$

$$\Rightarrow \exists Z \subseteq M,\ \overline{\overline{Z}} \geqq k,\ [Z]^e \subseteq M_0 \text{ 又は } [Z]^e \subseteq M_1$$

が成り立つことも容易にわかる。さて、

$$f(0) = e,\quad f(n+1) = g(f(n)) + 1$$

とおき、$M \geqq f(2k-1)$ なる M をとる。この M について

(1) $\quad M \to (k)^{e+1}_2$

が成り立つ。(1) を証明すれば定理が示されたことになる。

(1) の証明.

$$[M]^{e+1} = M_0 \cup M_1 \quad (M_0 \cap M_1 = \emptyset)$$

なるかってな分割を考える。各 $x \in M$ と $i = 1, 2$ に対して

$$M_i(x) = \{ y \in [M]^e \mid y \cup \{x\} \in M_i \}$$

とおくと、

$$[M - \{x\}]^e = M_0(x) \cup M_1(x),\ M_0(x) \cap M_1(x) = \emptyset$$

が成り立つ。

さて、$Z_0 = M,\quad H_0^0 = H_0^1 = \emptyset$ とおき $2k-2$ 段階まで進む：

m 段階 ($m \leqq 2k-2$)

$x_m = \min Z_m$ とおく.

$$\overline{\overline{Z_m}} \geqq f(2k-m-1) = g(f(2k-1-m-1)) + 1$$

とすれば、$\overline{\overline{Z_m - \{x_m\}}} \geqq g(f(2k-m-2))$,

又 $[Z_m - \{x_m\}]^e \subseteq M_0(x_m) \cup M_1(x_m)$

となるので帰納法の仮定より.

(i) $\exists Y \subseteq Z_m - \{x_m\}$, $\overline{\overline{Y}} \geqq f(2k-m-2)$, $[Y]^e \subseteq M_0(x_m)$

のとき, $Z_{m+1} = Y$, $H^0_{m+1} = H^0_m \cup \{x_m\}$, $H^1_{m+1} = H^1_m$

とおく。

(ii) $\exists Y \subseteq Z_m - \{x_m\}$, $\overline{\overline{Y}} \geqq f(2k-m-2)$, $[Y]^e \subseteq M_1(x_m)$

のとき, $Z_{m+1} = Y$, $H^0_{m+1} = H^0_m$, $H^1_{m+1} = H^1_m \cup \{x_m\}$

とおく.

$\overline{\overline{H^i_{2k-1}}} \geqq k$ $(i=0,1)$ なる i に対して, $H = H^i_{2k-1}$ とおく。

$[H]^{e+1} \subseteq M_i$ がいえる。何故ならかってな

$\{x_{i_0}, x_{i_1}, \cdots, x_{i_e}\} \in [H]^{e+1}$ $(i_0 < i_1 < \cdots < i_e)$ に対し

$\{x_{i_1}, \cdots, x_{i_e}\} \in [Z_{i_0+1}] \subseteq M_i(x_0)$ が成り立つ。

この証明からは $\overline{\overline{H}} \geqq \min H$ はいえない。$N \models (H)$ は ZFCの中で Ramsey定理の無限形を使って証明できる。証明は [1]にある。こゝでは省略する。

§2 [1]における $PA \nvdash (H)$ の証明の概略の次のようである。PAの言語に無限個の constant symbols $c_0, c_1, \cdots$ を加えた言語で表現される理論Tを考える。Tの公理は次のものである。

(i) $+, \times, <$ に関する PAの公理, limited formulas に関する帰納法.

(ii) $(c_i)^2 < c_{i+1}$ $(i=0,1,\cdots)$

(iii) i, k 等で ω の元の有限列(小さい順に並べたもの)を

表し，$c(\mathring{i}) = c_{i_1}, \cdots, c_{i_r}$とする。かってな$i<k, k'$，かってな limited formula $\psi(y, z)$に対して，

$$\forall y < c_i \, [\psi(y; c(k)) \leftrightarrow \psi(y; c(k'))].$$

次の命題を(A)で表わすことにする。

(A) $\forall e, k, r \, \exists M \, \forall \langle P_\xi ; \xi < 2^M \rangle \; P_\xi : [M]^e \to r$

$\exists X : \overline{\overline{X}} \geqq k$

(i) $a, b \in X,\ a < b \Rightarrow a^2 < b$

(ii) $a \in X,\ \xi \in 2^a \Rightarrow X-(a+1)$は$P_\xi$に対し均質.

以上の準備のもとに，

$$(H) \Rightarrow (A) \Rightarrow Con(T) \Rightarrow Con(PA)$$

がPAの中で実行されることが示されている。(H)を本質に必要とするのは(H) ⇒ (A)の証明である。ここではこの証明のみに注目し，他は省略する。

補題1 $P_i : [M]^{e_i} \to r_i \ (i<n)$なる分割が与えられたとき$e = \max_i e_i$，$r = \prod_i \max(r_i, 7)$とすれば，ある分割$P$が存在して，$P : [M]^e \to r$，すべての$H \subseteq M$，$\overline{\overline{H}} > e$に対して

HはPに対して均質 ⇔ HはすべてのP_iに対して均質.

(証略)

e, rはMによらないで定まることに注意。

$f_0(x) = x+2$，$f_{n+1}(x) = f_n^x(2)$とおく。$f_2(x) \geqq 2^x$，$f_3(x) \geqq \underline{2}_x = 2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}}\}x$なることがわかる。

補題 2　かってな m に対してある分割 R が存在して

$R:[M]^2 \longrightarrow r$ (r は m のみによる) 次の条件をみたす。

$X \subseteq M$ が relatively large かつ R に対して均質 (r.l.h. と略す) かつ $\overline{\overline{X}} > 2 \Rightarrow [\ \forall x, y \in X,\ x<y \Rightarrow f_m(x) < y\ ]$.

証明　$Q(x) = \min(x, p)$ とおけば，$Q:[M]^1 \longrightarrow p+1$ となり、このとき $\overline{\overline{X}} > 2$ が Q に対し均質なら $\min X \geqq p$ である．この Q に対してとくに $p = f_m(3)$ とおく．

$$\mathcal{P}_i(x, y) = \begin{cases} 0 & (f_i(x) < y \text{ のとき}) \\ 1 & (\text{その他のとき}) \end{cases} \qquad i \leqq m.$$

とおき，補題 1 により $Q, \mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1, \cdots, \mathcal{P}_m$ を 1 つまとめると

$R:[M]^2 \longrightarrow r$　(r は M によらない)

となる。これが求める R である．これを帰納法で示す。

X をかってな r.l.h. for R とし，$\overline{\overline{X}} = n$, $a = \min X$, $b = \max X$ とおく。$f_m(3) = p \leqq a$ より $m > i$ なるすべての i に対して，$f_i^2(2) < f_i^3(2) = f_{i+1}(3) \leqq f_m(3) \leqq a$.

又　$a = \min X \leqq \overline{\overline{X}} = n$ より，$a-2 \leqq n-2$．よって，

$f_{i+1}(a) = f_i^a(2) = f_i^{a-2}(f_i^2(2)) < f_i^{a-2}(a) \leqq f_i^{n-2}(a) < b$．一方 X は R に対して均質であるから $\forall x, y \in X,\ x<y \Rightarrow f_{i+1}(x) < y$.

補題 3　$\mathcal{P}:[M]^e \longrightarrow s$ ($e \geqq 2$) と m が与えられたとき次の条件をみたす $\mathcal{P}^*:[M]^e \longrightarrow s'$ (s' は m, e, s のみによる) が存在する。

$Y \subseteq M$ r. l. h. for $\mathcal{P}^*$, $\overline{\overline{Y}} > e$

$\Rightarrow \exists X \subseteq M$ Xは$\mathcal{P}$に対して均質かつ $\overline{\overline{X}} \geqq max\,(e+1,\ f_m(min\,X))$.

証明　$h(a) = max\,\{x \mid f_m(x) \leqq a\}$ とおき

$$S(\{a_1, \cdots, a_e\}) = \begin{cases} \mathcal{P}(\{ha_1, \cdots, ha_e\}) \\ \qquad (i \neq j \text{ なら } ha_i \neq ha_j \text{ のとき}) \\ \emptyset \qquad (\text{その他のとき}) \end{cases}$$

とおく。Rを補題2におけるのと同じものとする。RとSを補題1によって1つにまとめてできたものを$\mathcal{P}^*: [M]^e \to s'$とする。$Y \subseteq M$, r. l. h. for $\mathcal{P}^*$, $\overline{\overline{Y}} > e$ なるかってYに対し$X = h(Y)$とする。Rの性質より $\forall x, y \in Y$ $x < y$ なら $f_m(x) < y$ であるからhは1対1，よって $\overline{\overline{X}} = \overline{\overline{Y}} \geqq min\,(Y)$. hの定義より $f_m(min\,X) \leqq min\,Y \leqq \overline{\overline{X}}$, 又Yは$S$に対して均質であるからXは$\mathcal{P}$に関して均質になる。

(H) ⇒ (A) の証明

e, k, rがかってに与えられたとき，Mを求める。$e' = 2e+1$ とし，Zを固定しておく。$S: [Z]^{e'} \to 2$, $Q: [Z]^1 \to p$（補題2の証明におけるQで，pは $e(r^{(2^p)}+2) < f_3(p)$, $k < p$ をみたすもの）$R: [Z]^2 \to q$（補題2におけるRで，$m=2$としたもの，このときqはZにはよらない）とし，補題1を使いQ, R, Sを1つにまとめたものを$\mathcal{P}: [Z]^{e'} \to s$とする。sは2, p, qのみで決定されZにはよらない。この$\mathcal{P}$に$m=3$として補題3を

適用してできる分割を $P^*: [Z]^{e'} \to s'$ とする。s' は e', s のみにより Z によらない。(H)より, $M \underset{*}{\longrightarrow} (e'+1)^{e'}_{s'}$ なる M が存在する。$P_\xi: [M]^e \to r \ (\xi < 2^M)$ がかってに与えられたとき,

$S: [M]^{e'} \to 2$ を次のように定める:

$$S(a, \mathbb{b}, \mathbb{c}) = \begin{cases} 0 & (\text{すべての } \xi < 2^a \text{ に対し } P_\xi(\mathbb{b}) = P_\xi(\mathbb{c})) \\ 1 & (\text{その他のとき}) \end{cases}$$

q, s, s' は Z に関係なく定まるから M について Q, R, P, P^* を上と同様に定めることができる。$M \underset{*}{\longrightarrow} (e'+1)^{e'}_{s'}$ であるから, $P^*: [M]^{e'} \to s'$ に対し, r. l. h. Y が存在する。補題3より, ある $X \subseteq M$ が存在して, X は P に対し均質, $\overline{\overline{X}} \geqq max(e'+1, f_3(min X))$ となる。補題1より, X は Q, R, S に対し均質となる。X が R に対して均質なることと $f_2(x) \geqq x^2$ より

(i) $x, y \in X, \ x < y \ \Rightarrow \ x^2 < y$.

X は Q に対して均質であるから, $a = min X$ とすれば $p \leqq a$

よって $e(r^{(2^a)}+2) \leqq f_3(a)$, $e(r^{(2^a)}+1) < \overline{\overline{X-(a+1)}}$.

$X-(a+1)$ の元を小さい方から順に e 個ずつ重複を許さず並べたものを $\mathbb{b}_0, \mathbb{b}_1, \cdots, \mathbb{b}_l$ とすると $r^{(2^a)} < l$ であり, 又 $\mathbb{b}_i$ を1つ定めるごとに列 $\langle P_0(\mathbb{b}_i), \cdots, P_\xi(\mathbb{b}_i), \cdots P_{2^a-1}(\mathbb{b}_i) \rangle$ が定まり, この列の総数は $r^{(2^a)}$ 個であるので, ある $\mathbb{b}_i, \mathbb{b}_j \ (i \neq j)$ が存在して, すべての $\xi < 2^a$ に対して $P_\xi(\mathbb{b}_i) = P_\xi(\mathbb{b}_j)$ となる。ゆえに $S(a, \mathbb{b}_i, \mathbb{b}_j) = 0$.　X の最後の e 個を $\mathbb{C}$ とし, $X' = X - \mathbb{C}$

とすれば，XはSに対して均質なので，かってな$b \in X'$，$\mathbb{b} \in [X']^e$に対して$S(b, \mathbb{b}, \mathbb{c}) = 0$がいえる。$X'$を改めて$X$と思うことによって

(ii) かってな$a \in X$，$\xi < 2^a$に対して，$X-(a+1)$はP_ξに対して均質。

以上の証明より結局 *relatively large* ($\min H \leqq \bar{\bar{H}}$) を仮定することは（補題3より）$\min H$に比べ$\bar{\bar{H}}$を十分大きくすることができることの保障を与えることであり，これが(A)の(ii)を示すのに重要な役割を果したのである。

§3.　PA の *countable nonstandard model* に対し，*indicator* なるものを定義し，ある種の *indicator* が PA で独立であることと及び (H) はこの種の *indicator* であることが示される。

Mを PA の *countable nonstandard model* とする。$I (\subseteq M)$がMの *initial segment* とは (i) $2 \in I$，(ii) $a, b \in I \Rightarrow a \cdot b \in I$，(iii) $a \in I,\ b \in M,\ b < a \Rightarrow b \in I$ なるときいい，$I \subset_e M$で表わす。

$Y: M^2 \to M$がMで *definable* のとき，次の条件をみたせばYは *indicator* であるといわれる：

$a, b \in M;\qquad Y(a, b) > N \iff \exists I \subset_e M\ \ a \in I < b\ \ I \models PA.$

以下次の性質をもつ *indicators* を考える。

(i) $\Upsilon(x, y) = z \quad : \quad \Sigma_1$,

(ii) $PA \vdash \forall x, y \exists ! z \ \Upsilon(x, y) = z$,

(iii) J : countable , $J \models PA \Rightarrow \Upsilon^J = \{ \langle a, b, c \rangle \in J^3 \mid J \models \Upsilon(a, b) = c \}$

indicator in J ,

(iv) $PA \vdash \forall x, y \ (\Upsilon(0, x+y) \leqq 1 + \Upsilon(0, x) + \Upsilon(x, x+y))$.

$I \subset_e M$ かつ $I \models PA$ のとき, $i(I) = \{ \alpha \in M \mid \forall a \in I \exists b \in I \ \Upsilon(a, b) \geqq \alpha \}$ とすれば次の補題が成り立つ。

補題 (a) $I \subset_e M, I \models PA \Rightarrow i(I) \geqq N$

(b) $\exists I \subset_e M, I \models PA, i(I) < I$.

証明 (a) $I \neq M$ としてよい。ある $n \in N$ に対して $i(I) < n$ と仮定する。$\exists a \in I \ \forall b \in I \ \Upsilon(a, b) < n$ となる。これより，ある $b > I$ に対して $\Upsilon(a, b) < n$ となる。何故なら $\forall b > I \Rightarrow \Upsilon(a, b) \geqq n$ とすれば Υ の *definability* よりこのような最小の b_0 がある。$b_0 - 1 \in I$ となる。$I \models PA$ より $b_0 = b_0 - 1 + 1 \in I$ となるから。さて，$a \in I < b$, $I \models PA$ より Υ の定義を使い $\Upsilon(a, b) > N$. 矛盾。

(b) $a \in M$, $N < a$ とする。

(イ) $\forall b \in M \ \Upsilon(a, b) < a \Rightarrow i(M) < M$

(ロ) $\exists b \in M \ \Upsilon(a, b) \geqq a$ のとき，最小の b をとる。Υ の定義より $\exists I \subset_e M, a \in I < b, I \models PA$ となる。よって $\forall c \in I \ \Upsilon(a, c) < a$.

故に $i(I)<I$.

系1　$\forall n\in N\ PA\vdash\forall x\exists y(\Upsilon(x,y)>\bar{n})$

証明　補題(a)で $I=M$ とおく。$\forall n\in N\ n<i(M)$ よって $M\models\forall x\exists y(\Upsilon(x,y)>\bar{n})$。$M$はかってなPAの countable nonstandard model であるから $PA\vdash\forall x\exists y(\Upsilon(x,y)>\bar{n})$.

系2　$N\models\forall x,z\exists y(\Upsilon(x,y)>z)$.

系3　$PA\nvdash\forall x,z\exists y(\Upsilon(x,y)>z)$.

証明　補題(b)より $I\subset_e M$, $I\models PA$, $i(I)<I$ なる Iをとる。$i(I)\leq c\in I$ なる cが存在する。よって $\exists a\in I\ \forall b\in I\ \Upsilon(a,b)\leqq c$. 故に $I\models\exists x,z\ \forall y(\Upsilon(x,y)\leqq z)$。

定理　$\forall z\exists y(\Upsilon(0,y)>z)$ は PA で独立である。

証明　系2, 系3, 及び indicator の性質(iv)より容易にでてくる。

(i)〜(iv)の性質をもつ indicators の例を証明なしで2つあげる。例2が本報告の主題であった(H)である。

例1.　SをNの有限部分集合としたとき、Sが0-dense であるとは、かってな有限集合のときいい、1-dense とは $S\neq\emptyset$, $\min(S)+3<|S|$ のとき、$(n+2)$-dense とは $f:[S]^3\to 2$ なるかってな fに対して $\exists T\subseteq S$ Tは$(n+1)$-dense かつ均質であるときにいう。$\Upsilon(a,b)=\max\{c\mid[a,b]$は$c$-dense$\}$ とすればΥは(i),(ii),(iii),(iv)をみたす indicator となる。

定理より $\forall z \exists y$ ($[0,y]$ は z-dense) は正しいが PA で証明できないことがわかる。

例2　$\Upsilon(a,b) = \max\{c \mid [a,b] \underset{*}{\rightarrow} (2c)^c_c\}$ とおけば，この Υ も (i)～(iv) をみたす indicator であることが知られる。よって定理より $\forall z \exists y ([0,y] \underset{*}{\rightarrow} (2z)^z_z)$ 又は $\forall x,w,z \exists y ([0,y] \underset{*}{\rightarrow} (x)^w_z)$ が正しいが PA で証明できないことがわかる。